2 Häufigkeitsverteilungen

- Ziel: Darstellung bzw. Beschreibung (Exploration) $einer$ Variablen.
- Ausgangssituation: An n Einheiten $\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n$ sei das Merkmal X beobachtet worden.

  $x_i = X(\omega_i) \Rightarrow x_1 = X(\omega_1), \ldots, x_n = X(\omega_n)$

  Also $x_i = X(\omega_i)$, d.h. x_i ist der Wert der i-ten Person
- $x_1, \ldots, x_n$ werden auch als Urliste oder Rohdaten und n als Stichprobenumfang bezeichnet.
- Die verschiedenen meist selben Merkmalsausprägungen werden mit $a_1, \ldots, a_k$ bezeichnet.
- Bemerkungen:

  Meist bezeichnet $a_1, \ldots, a_k$ die prinzipiell möglichen Merkmalsausprägungen. Manchmal aber auch die tatsächlich beobachteten

verschiedenen Merkmalsausprägungen.
Werden mehr Beobachtungen erhoben, so ändert sich n, aber i.A. k nicht.
Für mindestens ordinalskalierte Merkmale seien die Ausprägungen stets als geordnet angenommen, d.h.

$$a_1 < a_2 < \ldots a_j < \ldots < a_k.$$

Beispiel: Häufigkeitsverteilung der Schichtzugehörigkeit einer Gesamtheit Ω von acht Personen $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$.

Kategorien: Unterschicht, Mittelschicht, Oberschicht.

Tabelle:

Person ω	$X(\omega)$	
ω_1	M	x_1
ω_2	M	x_2
ω_3	O	x_3
ω_4	M	x_4
ω_5	M	x_5
ω_6	M	x_6
ω_7	U	x_7
ω_8	O	x_8

$n =$

$k =$

$a_1 =$

$a_2 =$

$a_3 =$

2.1 Häufigkeiten

Absolute Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen:

Für jedes a_j, $j = 1, \ldots, k$, bezeichnen h_j und $h(a_j)$ die absolute Häufigkeit der Ausprägung a_j, d.h. die Anzahl der x_i aus $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i = a_j$.

Formal:

$$h_j := h(a_j) := |\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a_j\}|.$$

$|M|$ bezeichnet die Mächtigkeit der Menge M

$:=$ bedeutet „wird definiert als“. (Definitionen sind begriffliche Festlegungen)

$h_1, h_2, \ldots, h_k$ (als Ganzes) nennt man die absolute Häufigkeitsverteilung.

Es gilt

$$\sum_{j=1}^{k} h_j = n.$$

Erste Darstellung von Häufigkeiten anhand einer Strichliste:

Relative Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen:

Für jedes a_j, $j = 1, \ldots, k$, bezeichnen f_j und $f(a_j)$ die relative Häufigkeit der Ausprägung a_j, also

$$f_j := f(a_j) := \frac{h_j}{n}.$$

$f_1, f_2, \ldots, f_k$ nennt man die relative Häufigkeitsverteilung.

Es gilt

$$\sum_{j=1}^{k} f_j = 1.$$

Häufigkeitstabelle:

Allgemeine Form:

j	a_j	h_j	f_j
1	a_1	h_1	f_1
2	a_2	h_2	f_2
3	a_3	h_3	f_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	a_k	h_k	f_k
$\sum$		n	1

Im Beispiel:

j	a_j	h_j	f_j
1			
2			
3			
$\sum$			

- Insbesondere bei stetigen oder quasi-stetigen Merkmalen ist es häufig zweckmäßig, die Merkmalsausprägungen zu klassieren / zu gruppieren.

  $\Rightarrow$ gruppierte Häufigkeitsverteilung.

- Die gruppierte Häufigkeitsverteilung enthält nur die Häufigkeiten der Ausprägungen in den einzelnen Gruppen, die einzelnen a_j entsprechen in diesem Fall Intervallen.

- Achtung: Die Gruppierung bedeutet einen Informationsverlust

Beispiel Mietspiegel: Merkmal = Nettomieten

Urliste für n=26 Wohnungen, bereits der Größe nach geordnet:

127	172	194	217	226	228	238	248	272	337	347	349	349
373	375	378	383	394	426	443	466	467	533	539	560	676

Klasse j	h_j	f_j
$100 < \ldots \leq 200$		
$200 < \ldots \leq 300$		
$300 < \ldots \leq 400$		
$400 < \ldots \leq 500$		
$500 < \ldots \leq 600$		
$600 < \ldots \leq 700$		
$\sum$		

2.2 Grafische Darstellung

Stabdiagramm: Trage über $a_1, \ldots, a_k$ jeweils einen zur x-Achse senkrecht stehenden Stab mit Höhe $h_1, \ldots, h_k$ (oder $f_1, \ldots, f_k$) ab.

Horizontal:	Ausprägungen der Variablen $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$
Vertikal:	absolute / relative Häufigkeiten ($h_1, \ldots, h_k$ bzw. $f_1, \ldots, f_k$)

Vorausgesetztes Skalenniveau: mindestens Nominalskala

Säulendiagramm: Ersetze die Stäbe durch Rechtecke (Säulen) gleicher Breite.

Balkendiagramm: Säulendiagramm mit vertauschten Achsen

Vorausgesetztes Skalenniveau: mindestens Nominalskala

Kreisdiagramm („Tortendiagramm“): Der Kreis wird in Segmente unterteilt, denen jeweils eine Ausprägung (oder Klasse) zugeordnet wird. Der jeweilige Winkel ist proportional zur Häufigkeit.

$\Rightarrow$ dadurch ist auch die Fläche proportional zur Häufigkeit: Prinzip der Flächentreue, also nicht zum Beispiel Höhenlinie der Segmente. Fläche entspricht aber auch dem Winkel und damit dem Umfang des Segments.

Für Stab-, Säulen- und Balkendiagramm gilt dagegen das Prinzip der Längentreue, d.h. die Länge der Stäbe / Säulen / Balken ist proportional zur Häufigkeit.

Berechnung: Winkel des Kreissektors j = relative Häufigkeit $\times 360°$

	Häufigkeit	Winkel
$f_1 =$	14	
$f_2 =$		
$f_3 =$		

Vorausgesetztes
Skalenniveau:
mindestens
Nominalskala,

Bemerkungen:

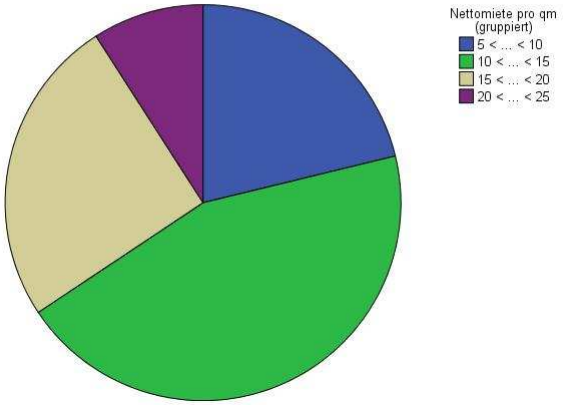
- Durch Schichtung können die Grafiken auch zum Vergleich von Häufigkeitsverteilungen eingesetzt werden.

- Für ordinalskalierte Merkmale lässt sich mit Stab- / Balken- / Säulendiagramm auch die Ordnung der Kategorien darstellen.

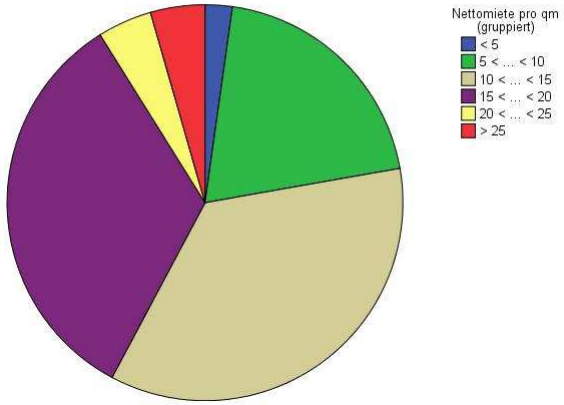
- Alle bisherigen Grafiken sind nur sinnvoll für kleine Kategorienzahlen k. Bei großen k Klasseneinteilungen oft problematisch.
  Viele Klassen: bleibt unübersichtlich
  Wenige Klassen: starker Informationsverlust und eventuell starke Abhängigkeit von der konkreten Wahl der Klassen.

- Tortendiagramme in $3D-$ Abbildungen vermitteln oft verzerrten Eindruck.

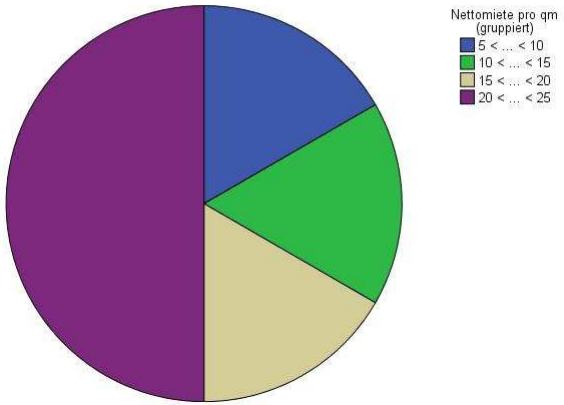
Normale Lage



Gute Lage



Beste Lage



Stamm-Blatt-Diagramm: Semigrafisches Verfahren in Analogie zu Strichlisten, gut geeignet für mittelgroßes k. Bei großem k Klasseneinteilung oft problematisch.
Viele Klassen: bleibt unübersichtlich.
Wenige Klassen: starker Informationsverlust und eventuell starke Abhängigkeit von der konkreten Wahl der Klassen.

Erklärung anhand des Mietspiegelbeispiels:

127	172	194	217	226	228	238	248	272	337	347	349	349
373	375	378	383	394	426	443	466	467	533	539	560	676

Grundidee:

1. Gebe groben Eindruck von dem Bereich, in dem Ausprägungen liegen (Stamm)

2. Veranschauliche Häufigkeiten in Klassen und bewahre zugleich Wissen über die detaillierte Lage der Ausprägungen (von jedem Punkt auf dem Stamm abzweigende Blätter)

Stamm:	führende Ziffern
Blatt:	nächste Ziffer (evtl. gerundet)

Prinzipielles Vorgehen:

1. Suche den kleinsten und größten Wert der Urliste und zerlege den Wertebereich in Intervalle der Breite 10^q (Vielfache von 10, q ist geeignet zu wählen).

2. Runde die Daten auf die führenden q Stellen.

130	170	190	220	230	230	240	250	270	340	350	350	350
370	380	380	380	390	430	440	470	470	530	540	560	680

3. Bestimme den Stamm aus den führenden Ziffern:

   $\Rightarrow$

4. Bestimme die Blätter aus der folgenden Ziffer:

3	7	9	2	3	3	4	5	7	4	5	5	5
7	8	8	8	9	3	4	7	7	3	4	6	8

5. Trage für jeden Wert des Stamms die zugehörigen Blätter rechts von einer vertikalen Linie der Größe nach geordnet ab:

Vorteile:

- Implizierte Gruppierung ohne viel Information zu verlieren, da die Darstellung bis auf Rundungen alle Werte der Urliste enthält.
- Ermöglicht guten Einblick in Datenstruktur für explorative Analysen, z.B. auch Erkennen von Ausreißern.

Nachteile:

- Wird bei großen Datensätzen schnell unübersichtlich.
- Lässt sich oft nicht mehr gut auf Papier präsentieren.

2.3 Histogramm

Ziel:

- Gegeben: Urliste $x_1, \ldots, x_n$ eines (mindestens) intervallskalierten Merkmals.
- Wähle $c_0 \leq \min_{i=1,\ldots,n}(x_i)$ und $c_k \geq \max_{i=1,\ldots,n}(x_i)$
- Bilde Klasseneinteilung $[c_0, c_1), [c_1, c_2), \ldots, [c_{k-1}, c_k]$.
- Für jede Klasse $[c_{j-1}, c_j)$, $j = 1, \ldots, k$ sei

$$d_j = c_j - c_{j-1}$$

die Breite des j-ten Intervalls und h_j bzw. f_j die absolute bzw. relative Häufigkeit in der j-ten Klasse.

- Zeichne über jedem Intervall ein Rechteck der Breite d_j so, dass die Fläche proportional zu f_j und h_j ist.

Achtung: Das Histogramm ist flächentreu, nicht längentreu! Es gilt Fläche = Breite · Höhe und damit Höhe = Fläche / Breite. Also ist die Höhe der Rechtecke proportional zu

$$\frac{f_j}{d_j} \quad \text{bzw.} \quad \frac{h_j}{d_j},$$

und nicht zu f_j bzw. h_j.

Ein Histogramm unterscheidet sich damit substantiell von einem Säulendiagramm! Man muss also bei einer Grafik immer angeben, ob es sich um ein Säulendiagramm oder ein Histogramm handelt.

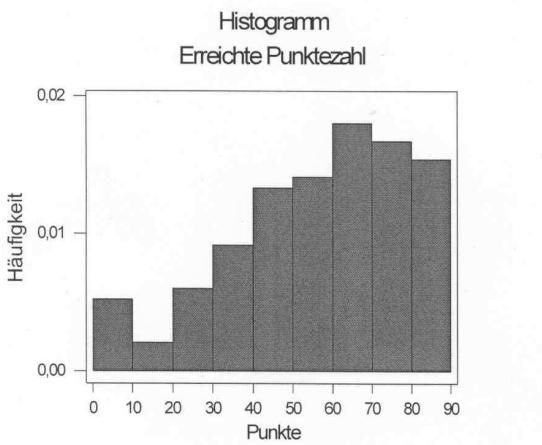
Beispiel: Punkteverteilung in der Klausur

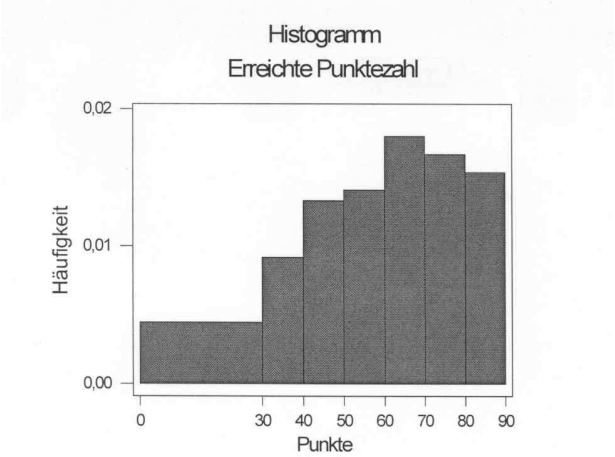
Klassen	h_j Hfgkt.	d_j Breite	Höhe
$[0, 35.5)$	53		
$[35.5, 48.5)$	78		
$[48.5, 64.5)$	91		
$[64.5, 79.5)$	96		
$[79.5, 90]$	65		
	383		

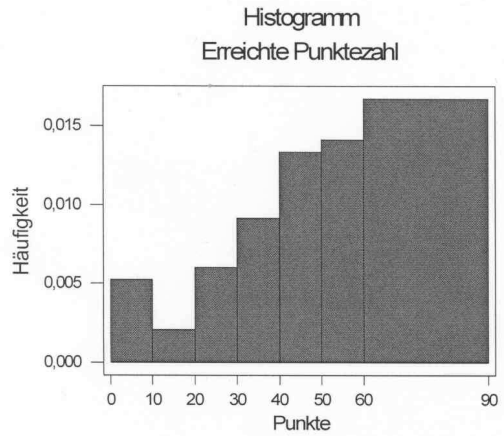
Vorteile des Histogramms:

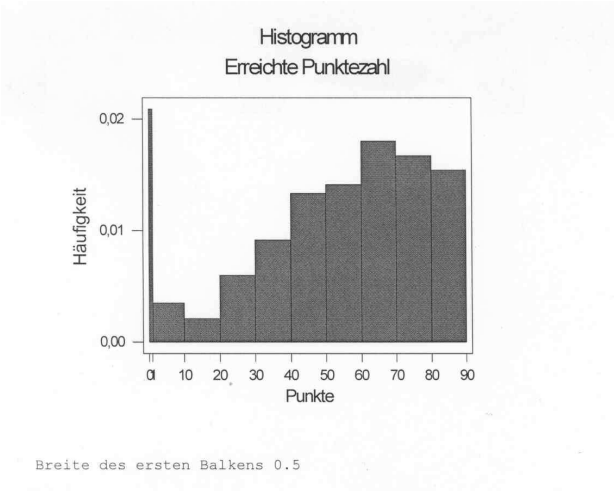
- Information der metrischen Skala (Differenzen) voll ausgenutzt
- etwas weniger empfindlich gegenüber Klasseneinteilung, da sich Häufigkeiten in der Fläche widerspiegeln

Tücken des Histogramms:

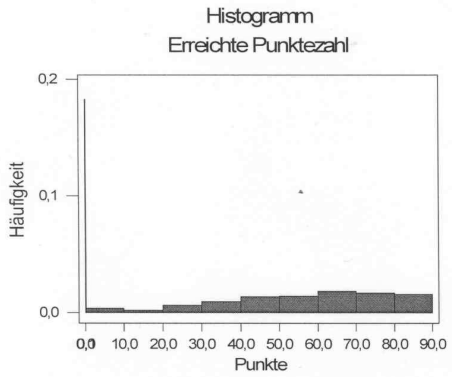




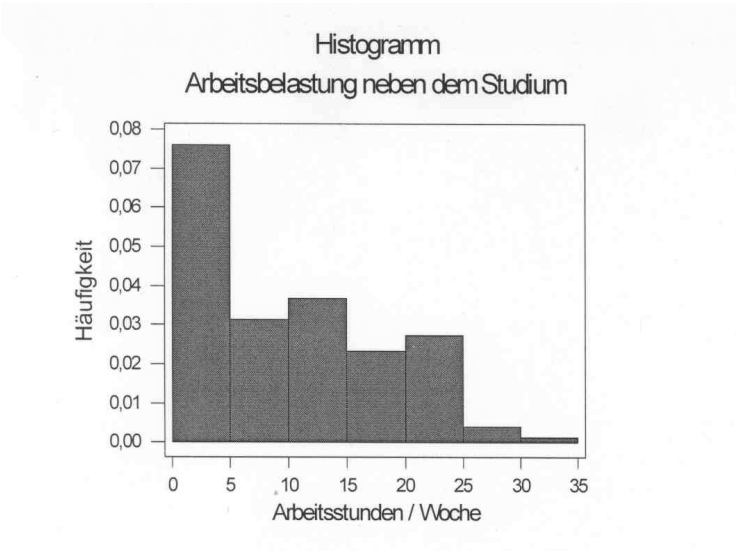


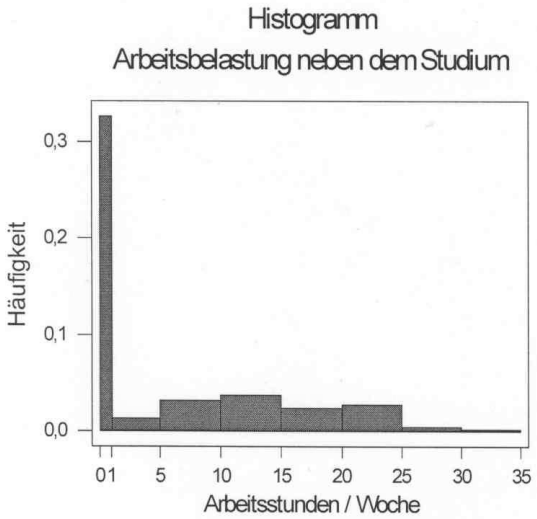


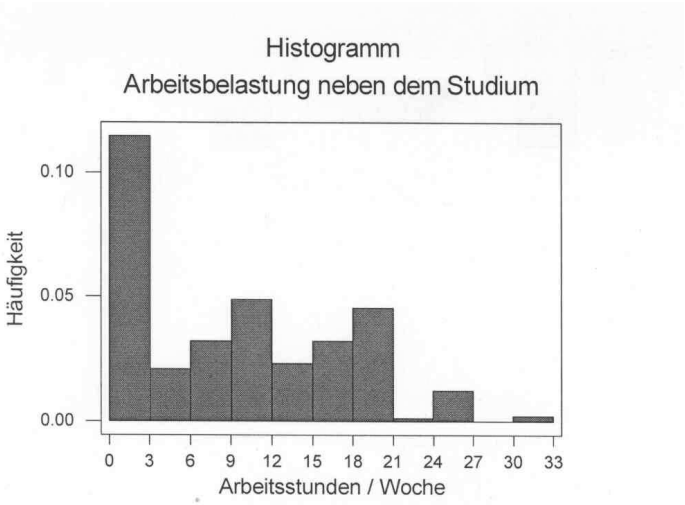
Breite des ersten Balkens 0.5

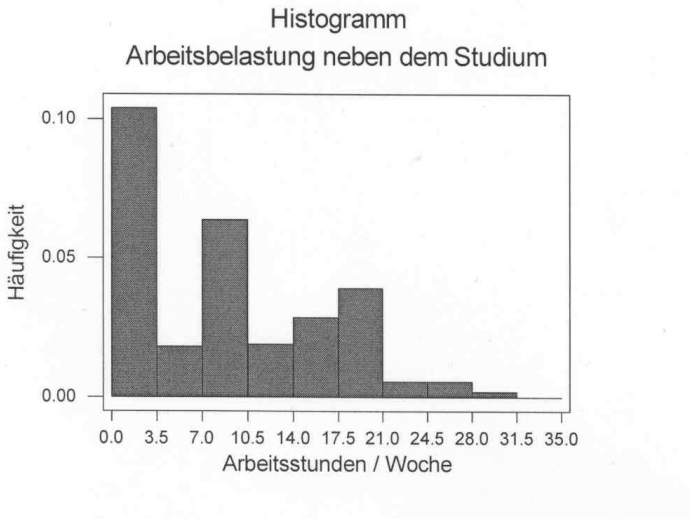


Breite des ersten Balkens 0.1


Histogramm
Arbeitsbelastung neben dem Studium
Häufigkeit
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0,00
0
5
10
15
20
25
30
35
Arbeitsstunden / Woche


Histogramm
Arbeitsbelastung neben dem Studium
Häufigkeit
0,3
0,2
0,1
0,0
01
5
10
15
20
25
30
35
Arbeitsstunden / Woche

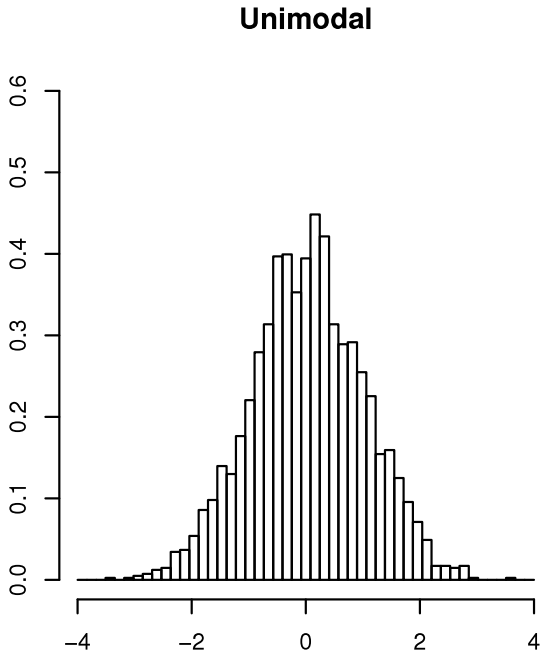

Histogramm
Arbeitsbelastung neben dem Studium
Häufigkeit
0.10
0.05
0.00
0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33
Arbeitsstunden / Woche

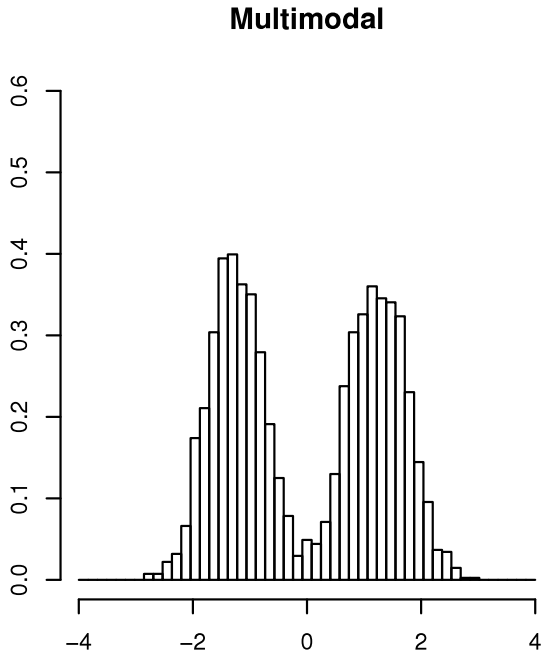

Histogramm
Arbeitsbelastung neben dem Studium
Häufigkeit
0.10
0.05
0.00
0.0 3.5 7.0 10.5 14.0 17.5 21.0 24.5 28.0 31.5 35.0
Arbeitsstunden / Woche

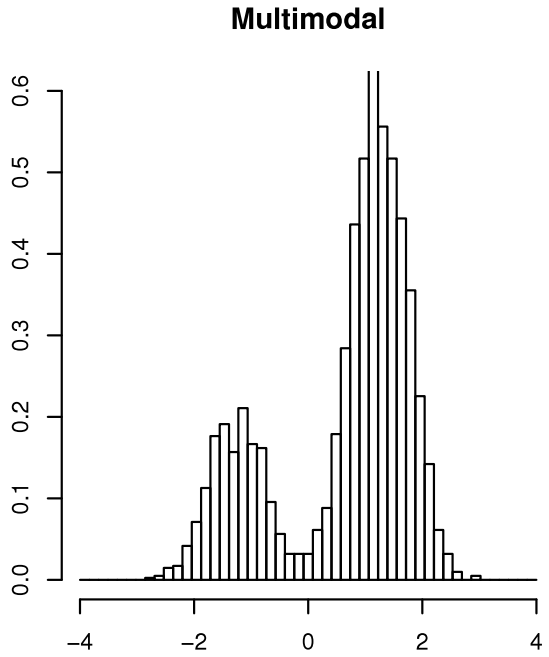
Typen von Häufigkeitsverteilungen

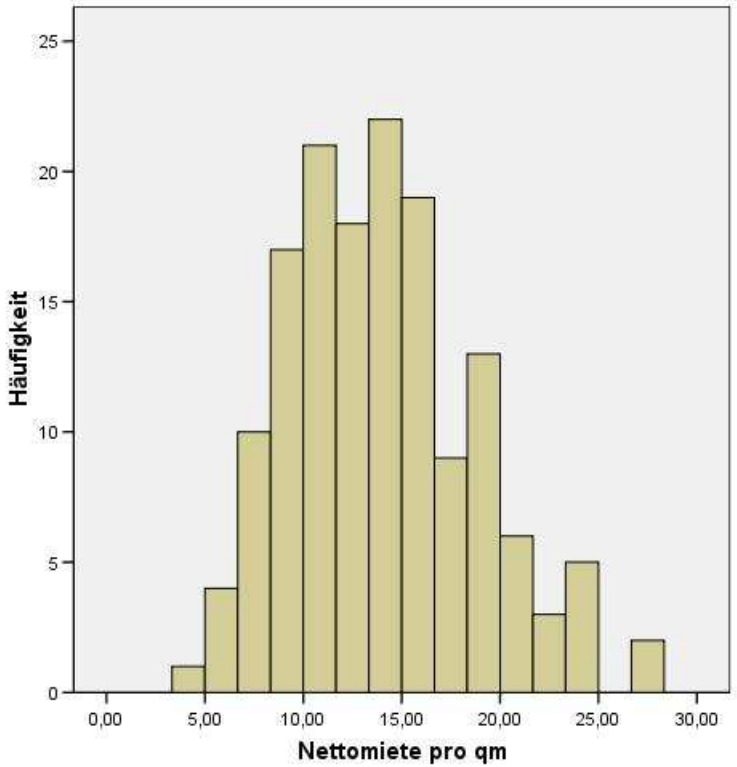
Histogramme eignen sich gut zur Beurteilung der Form von Häufigkeitsverteilungen

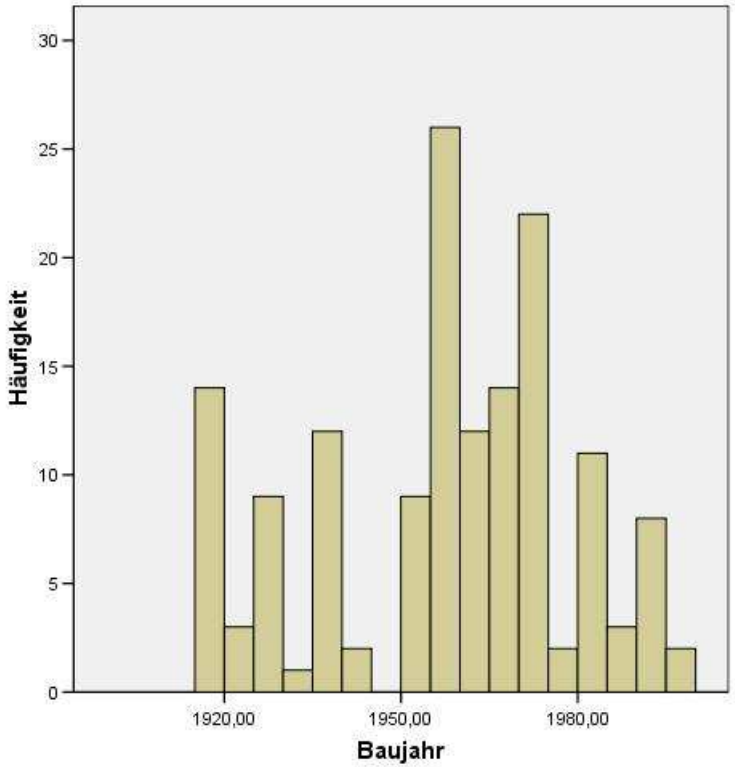
- Unimodale und multimodale Verteilungen:


Unimodal
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
−4
−2
0
2
4


Multimodal
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
−4
−2
0
2
4

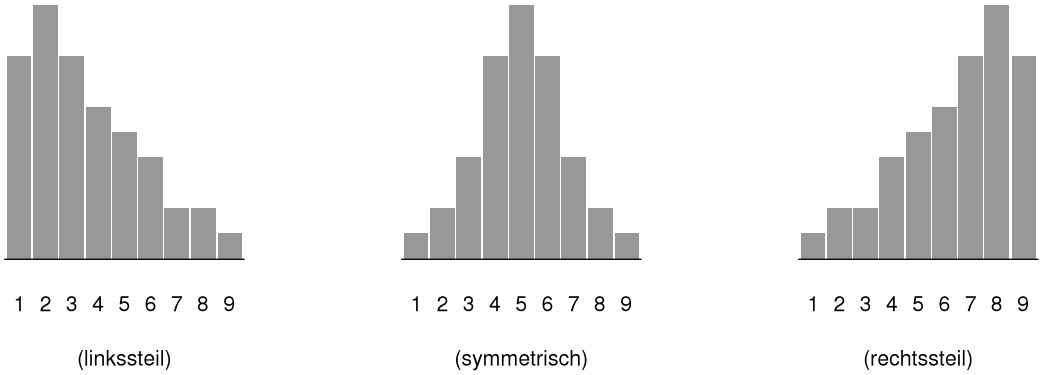

Multimodal
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
−4
−2
0
2
4


Häufigkeit
25
20
15
10
5
0
0,00
5,00
10,00
15,00
20,00
25,00
30,00
Nettomiete pro qm


30
25
20
15
10
5
0
Häufigkeit
1920,00
1950,00
1980,00
Baujahr

- Symmetrie und Schiefe

symmetrisch:	Rechte und linke Hälfte der Verteilung sind annähernd zueinander spiegelbildlich.
linkssteil (rechtsschief):	Verteilung fällt nach links deutlich steiler und nach rechts langsamer ab.
rechtssteil (linksschief):	Verteilung fällt nach rechts deutlich steiler und nach links langsamer ab.



- Andere typische Verteilungsformen:
  - U-förmig,
  - J-förmig.

2.4 Kumulierte Häufigkeiten und empirische Verteilungsfunktion

Oft sind kumulierte Häufigkeiten von Interesse, also eine Antwort auf die Frage „Wieviel Prozent der Daten über-/unterschreiten einen bestimmten Wert?“

- Wieviel Prozent der Studenten arbeiten bis zu 8 Stunden pro Woche neben dem Studium?

- Wieviel Prozent der Studenten arbeiten mehr als 8 Stunden pro Woche neben dem Studium?

- Wieviel Prozent der Studenten haben mindestens 35.5 Punkte, also die Klausur bestanden?

Voraussetzung: Mindestens ordinalskaliertes Merkmal.

Gegeben sei die Urliste $x_1, \ldots, x_n$ eines (mindestens) ordinalskalierten Merkmals mit der Häufigkeitsverteilung $h_1, \ldots, h_k$ bzw. $f_1, \ldots, f_k$.

Dann heißt

$$\begin{aligned} H(x) &:= \text{Anzahl der Werte } x_i \text{ mit } x_i \leq x \\ &= \sum_{j: a_j \leq x} h(a_j) = \sum_{j: a_j \leq x} h_j \end{aligned}$$

absolute kumulierte Häufigkeitsverteilung und

$$\begin{aligned} F(x) &:= \text{Anteil der Werte } x_i \text{ mit } x_i \leq x \\ &= H(x)/n \\ &= \sum_{j:a_j \leq x} f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{j:a_j \leq x} h(a_j) \end{aligned}$$

relative kumulierte Häufigkeitsverteilung bzw. empirische Verteilungsfunktion.

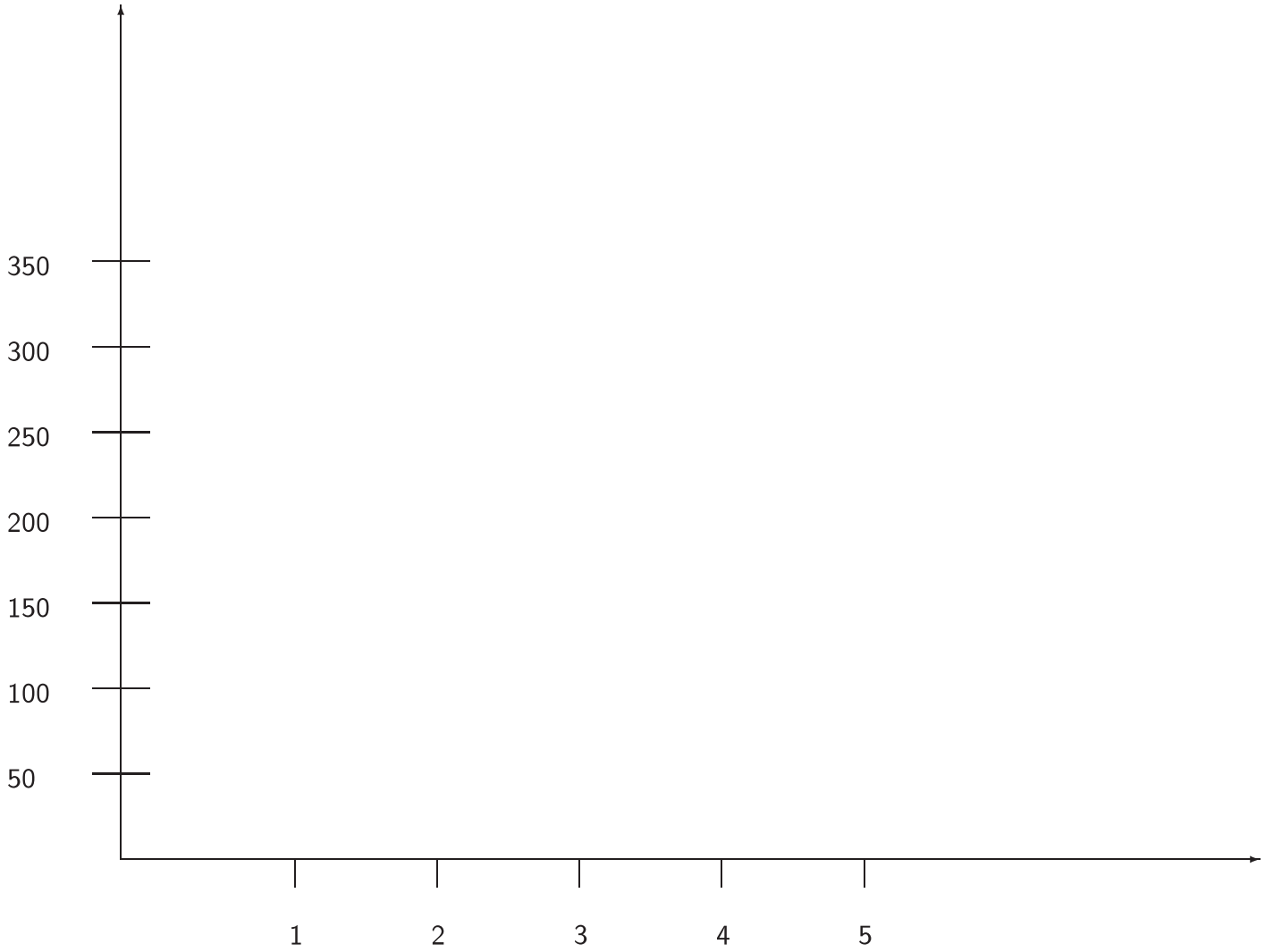
Die Schreibweise $H(x) := \sum_{j:a_j \leq x} h(a_j)$ ist eine Abkürzung für

$$H(x) := \sum_{j \in J_x} h(a_j) \text{ mit } J_x := \{j | a_j \leq x\},$$

d.h. für jedes x wird die Summe über alle j mit der Eigenschaft betrachtet, dass die zugehörigen Werte a_j kleiner gleich x sind (analog für $F(x)$).

Beispiel: Klausurnoten (zur Vereinfachung $a_j = j$)

Note: a_j	$h(a_j)$	$H(a_j)$	$f(a_j)$	$F(a_j)$
$a_1 = 1$	65		0.17	
$a_2 = 2$	96		0.25	
$a_3 = 3$	91		0.24	
$a_4 = 4$	78		0.20	
$a_5 = 5$	53		0.14	
	383		1.00	


350
300
250
200
150
100
50
1
2
3
4
5

Bemerkungen:

- $F(x)$ sieht genauso aus; einfach den Maßstab auf der Ordinate (y-Achse) durch 383 teilen.
- Man kann aus $H(x)$ und $F(x)$ die Häufigkeitsverteilungen $h_1, \ldots, h_k$ und $f_1, \ldots, f_k$ reproduzieren, z.B. ist

$$h(a_j) = H(a_j) - H(a_{j-1})$$

  die Häufigkeit von a_j. Beide Darstellungen enthalten also die volle Information über die Häufigkeitsverteilung.

- Bei rein ordinalen Merkmalen ist die Skaleneinteilung auf der Abszisse (x-Achse) völlig willkürlich; man könnte obige Funktion z.B. genauso gut wie folgt zeichnen:

- Bei intervallskalierten Merkmalen ist diese Willkürlichkeit nicht mehr vorhanden $\Rightarrow$ kumulierte Häufigkeitsverteilungen werden fast nur bei intervallskalierten Merkmalen betrachtet.

- Empirische Verteilungsfunktion, wenn alle Beobachtungen verschieden sind:

- Empirische Verteilungsfunktion bei gegebenen Häufigkeiten $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

Kumulierte Häufigkeiten bei gruppierten Merkmalen

Beispiel: Punkteverteilung in den Klassen

Klassen	Häufigkeiten	kumuliert
$[0, 35.5)$	53	
$[35.5, 48.5)$	78	
$[48.5, 64.5)$	91	
$[64.5, 79.5)$	96	
$[79.5, 90)$	65	

Bei gruppierten, intervallskalierten Merkmalen tritt folgendes zusätzliches Problem auf: Klar sind die Werte der kumulierten Häufigkeitsverteilungen an den zu den Intervallgrenzen gehörenden Punkten. Aber wie definiert man $H(x)$ und $F(x)$ zwischen diesen Punkten, was also ist etwa $H(40)$?

Jetzt ist $H(x)$ nicht mehr notwendigerweise konstant zwischen den Klassengrenzen. Beispielsweise ist 40 ja eine Ausprägung, die durchaus in den unklassierten Daten vorkam, und bei neuen Beobachtungen wieder vorkommen kann. $H(40)$ ist aber aus den klassierten Daten nicht mehr rekonstruierbar. Eigentlich weiß man nur, dass $H(40)$ einen Wert in dem entsprechenden Rechteck annehmen kann.

$\Rightarrow$ Üblicherweise lineare Interpolation, d.h. der unbekannte Verlauf zwischen $zwei\ Punkten$ wird durch eine Gerade durch diese Punkte angenähert. Beachte, die Steigungen der „Gradenstücken “ sind also im Allgemeinen unterschiedlich.

Allgemeine Formulierung:

- k Klassen $[c_0, c_1), \ldots, [c_{j-1}, c_j), \ldots, [c_{k-1}, c_k]$,$h_j$ Häufigkeit in j-ter Klasse.
- Verwende bei einem x aus der Klasse $[c_{j-1}, c_j)$ als Approximation für $H(x)$ folgenden, aus der linearen Interpolation gewonnenen Punkt:

- Geradengleichung:

$$H(x) \quad \approx \quad H(c_{j-1}) \quad + \quad \frac{h_j}{(c_j - c_{j-1})} \quad \cdot \quad (x - c_{j-1})$$

$$H(40) \quad \approx$$